9 класс

1. В какой фазе: полнолунии или новолунии Луна перемещается быстрее по орбите вокруг Солнца?

Луна движется по орбите вокруг Земли, которая, в свою очередь, движется вокруг Солнца. Направления этих двух движений одинаковы — против часовой стрелки, если смотреть с северного полюса Земли. Поэтому, когда Луна находится в противостоянии с Солнцем (полнолуние), её геоцентрическая орбитальная скорость складывается с гелиоцентрической скоростью Земли. В противоволожной фазе — новолунии – Луна находится между Землей и Солнцем, её геоцентрическая скорость вычитается из скорости Земли.

Таким образом, максимальная гелиоцентрическая скорость Луны имеет место в полнолуние, а минимальная — в новолуние.

2. Даны две звезды одинаковой массы. Одна из них вращается вокруг своей оси, другая — нет. В центре какой звезды давление больше?

Давление в центре звезды обусловлено весом вышележащих слоев вещества. Рассмотрим небольшой объем вещества расположенный в экваториальной плоскости вращающейся звезды. На него действуют две силы: сила притяжения к центру звезды и центробежная сила инерции, направленная в противоположную сторону. На аналогичный объем внутри невращающейся звезды действует только сила тяжести, не ослабленная центробежной силой. Следовательно, данный объем вещества на вращающейся звезде имеет меньший вес, чем на невращающейся. То же можно сказать и про все прочие объемы внутри этих звезд. В сумме, давление внутри вращающейся звезды оказывается меньшим.

3. Где на Земле должен находится наблюдатель, чтобы восход Солнца (процесс появления диска из-за горизонта) имел для него максимальную продолжительность?

Вращение Земли вокруг своей оси приводит к видимым движениям всех светил параллельно небесному экватору. Чем менее наклонен небесный экватор к горизонту, тем более пологой представляется траектория светила на восходе. Для объекта с заметным диском, таким как Солнце, пологая траектория приводит к тому, что диск выходит из-под горизонта медленнее, ибо большая часть его скорости направлена вдоль горизонта, а меньшая — перпендикулярно ему. В предельном случае — на полюсе Земли — все звезды движутся параллельно горизонту, не восходят и не заходят. Солнце же совершает восход и заход, но уже не вследствие вращения Земли, а вследствие движения её по орбите. Это движение намного медленнее, чем вращение (примерно в 365 раз). Стало быть, восход Солнца тоже будет происходить крайне медленно.

Фактически, с точки зрения наблюдателя на полюсе, Солнце на небе описывается восходящую спираль. Когда его верхний край появляется на горизонте, наблюдатель видит, как оно описывает вокруг него суточные круги, медленно поднимаясь вверх. Чтобы солнечный диск диаметром 30 угловых минут полностью вышел из-за горизонта, на те же 30 минут должно увеличиться склонение Солнца. На это потребуется чуть больше суток.

4. В каком направлении — слева направо, или справо налево — движется вследствие прецессии точка весеннего равноденствия для наблюдателя в северном полушарии Земли?

Сам термин «прецессия» (лат. *praecessio*) означает «предварение», применительно к точке весеннего равноденствия — «предварение равноденствия». Т. е. равноденствие случается каждый год все раньше и раньше. Очевидно, это происходит потому, что точка весеннего равноденствия движется по эклиптике *навстречу* Солнцу. Наблюдатель в северном полушарии видит годичное движение Солнца (если, разумеется, исключить суточное движение небесной сферы), совершающимся с запада на восток, или, если стоять лицом на юг, — справа налево. Следовательно, точка весеннего равноденствия движется слева направо.

5. Найти синодический период Луны, если её сидерический период равен 27,32 суток.

Как известно, сидерическим назвается период, измеренный относительно неподвижной звезды, синодическим же — относительно движущегося Солнца. Очевидно, синодический период больше сидерического, так как после полного оборота относительно звезды нужно еще «догнать» сместившееся за это время Солнце.

Пусть ω_T — угловая скорость относительно звезды (сидерическая), ω_S — аналогичная скорость относительно Солнца (синодическая), ω_E — угловая скорость Солнца, T, S и E — соответствующие периоды обращений. Согласно закону сложения скоростей

$$\omega_S = \omega_T - \omega_E.$$

Подставив сюда выражения угловых скоростей через периоды, получим

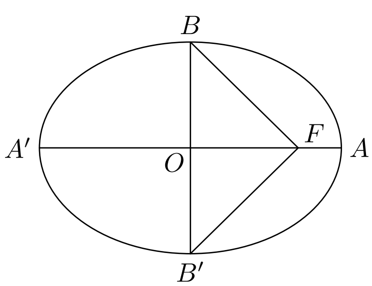
$$\frac{2\pi}{S} = \frac{2\pi}{T} - \frac{2\pi}{E},$$

откуда

$$S = \frac{TE}{E-T} = \frac{27{,}32 \cdot 365{,}25}{365{,}25 - 27{,}23} = 29{,}52 \text{ сут.}$$

6. Найти отношение времен прохождения планетой двух участков эллиптической орбиты с эксцентриситетом e, если эти участки получаются при разделении эллипса его малой осью.

Согласно второму закону Кеплера, радиус вектор в равные промежутки времени описывает равные площади. Следовательно, время движения по какому-либо участку орбиты пропорционально площади, описанной на этом участке радиусом-вектором. Значит, отношение времён движения по двум участкам равно отношению площадей, описанных на них радиусом-вектором.



На рисунке показана эллиптическая орбита планеты. Солнце находится в фокусе F. Отрезки OA и OB суть большая и малая полуоси. Обозначим их буквами a и b соответственно. Из геометрии известно, что $OF = ea$. При движении по половине эллипса $BA'B'$ радиус-вектор описывает площадь фигуры $FBA'B'$, состоящей из половинки эллипса $BA'B'$ и треугольника $BB'F$:

$$S_1 = S_{BA'B'} + S_{\Delta BB'F}.$$

На втором участке орбиты радиус вектор описывает площадь фигуры $ABFB'$, равную площади полуэллипса ABB' минус площадь того же треугольника $BB'F$:

$$S_2 = S_{ABB'} - S_{\Delta BB'F}.$$

Площадь эллипса равна πab, а площадь треугольника $BB'F$ находится так:

$$S_{\Delta BB'F} = 2S_{\Delta BOF} = 2 \cdot OB \cdot OF = 2bae.$$

В результате имеем:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{\dfrac{\pi ab}{2} + abe}{\dfrac{\pi ab}{2} - abe} = \frac{\pi + 2e}{\pi - 2e}.$$

10 класс

1. Предположим, что летом в ясную безлунную ночь вы находитесь в поле за городом. Тогда на небе можно наблюдать великолепную полосу Млечного Пути. Зная, что Солнце находится далеко о центра Галактики, как бы вы могли определить направление на этот центр?

Поскольку Галактика имеет форму чечевицы с утолщением в центре, то с края диска изнутри него будет выглядеть как светлая полоса с утолщением к центру. То есть центр Галактики там, где Млечный Путь шире. Это имеет место на границе созвездий Стрельца и Лебедя.

2. Известно, что Земля при движении вокруг Солнца изменяет свою скорость от $29{,}5$ **км/с до** $30{,}5$ **км/с. Найти эксцентриситет** e **земной орбиты.**

Воспользуемся известными формулами для скорости тела в перицентре v_π и апоцентре v_α его орбиты:

$$v_\pi = v_0\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}, \quad v_\alpha = v_0\sqrt{\frac{1-e}{1+e}},$$

где v_0 — скорость на круговой орбите с той же большой полуосью, что и на исследуемой.

$$\frac{v_\pi}{v_\alpha} = \frac{1+e}{1-e}.$$

Это уравнение легко решить относительно e:

$$e = \frac{v_\pi - v_\alpha}{v_\pi + v_\alpha}.$$

Подставив численные данные, найдем:

$$e = \frac{30{,}5 - 29{,}5}{30{,}5 + 29{,}5} = 0{,}0167.$$

3. Найти кратчайшее расстояние между двумя точками на Земле, находящимися на одной географической долготе, если известны географические широты точек ($\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 60°$, $R_E = 6371$ км).

Точки находятся на одном меридиане, который можно считать окружностью. Из условия неясно, нужно ли считать расстояние по поверхности Земли, или же в пространстве. К счастью, оба находятся тривиально. В первом случае (по дуге):

$$l = R\Delta\varphi\frac{\pi}{180°} = 6672 \text{ км},$$

во втором (по хорде):

$$l = 2R\sin\frac{\Delta\varphi}{2} = 6371 \text{ км}.$$

Здесь $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.

4. Искусственая планета движется по круговой орбите с радиусом $a = 1{,}5$ а. е. **вокруг Солнца. Найти линейную скорость движения этой планеты** ($M = 2 \cdot 10^{33}$ г, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-8}$ см^3/(г $\cdot$ с^2), 1 а. е. $= 149{,}6 \cdot 10^6$ км).

Для отыскания скорости обратим внимание на то, что центростремительное ускорение, испытываемое планетой на орбите, вызвано притяжением к Солнцу:

$$\frac{v^2}{a} = \frac{GM}{a^2},$$

откуда легко найдем

$$v = \sqrt{\frac{GM}{a}}.$$

Выразив все величины в системе СИ и подставив их в эту формулу, получим:

$$v = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30}}{1{,}5 \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11}}} = 2{,}44 \cdot 10^4 \text{ (м/с)} = 24{,}4 \text{ (км/с)}.$$

5. Планета движется вокруг Солнца по круговой орбите с постоянной линейной скоростью $v = 40$ км/с. **Найти период обращения** T **планеты вокруг Солнца** ($M = 2 \cdot 10^{33}$ г, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-8}$ см^3/(г $\cdot$ с^2)).

Эта задача является отражением предыдущей. Сейчас нам известна скорость, и нужной найти большую полуось, что позволит определить длину орбиты и период обращения. Мы имеем:

$$\frac{v^2}{a} = \frac{GM}{a^2}.$$

Следовательно,

$$a = \frac{GM}{v^2}.$$

С другой стороны, орбитальная скорость равна

$$v = \frac{2\pi a}{T},$$

откуда

$$T = \frac{2\pi a}{v} = \frac{2\pi GM}{v^3}.$$

Вновь выразив все величины в системе СИ, найдем

$$T = \frac{2 \cdot 3{,}1416 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30}}{(4 \cdot 10^4)^3} = 1{,}31 \cdot 10^7 \text{ (с)}.$$

Или, переведя секунды в годы,

$$T = \frac{1{,}31 \cdot 10^7}{365{,}25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60} = 0{,}415 \text{ года}.$$

6. Радиус сферического астероида равен $0{,}1$ **радиуса Земли, а масса астероида —** 10^{-4} **массы Земли. Найти отношение сил притяжения на Земле и на астероиде.**

Присвоим индекс 1 Земле, индекс 2 — астероиду. По закону всемирного тяготения

$$F_1 = \frac{GM_1 m}{R_1^2}, \quad F_2 = \frac{GM_2 m}{R_2^2},$$

где m — масса пробного тела. Поделив первую формулу на вторую, получим искомое:

$$\frac{F_1}{F_2} = \left(\frac{M_1}{M_2}\right) \cdot \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 = \frac{1}{10^{-4}} \cdot 0{,}1^2 = 100.$$

7. Найти среднюю плотность Земли, если известен радиус Земли $R = 6371$ км **и ускорение свободного падения на его поверхности** $g = 9{,}81$ м/с^2. (Гравитационная постоянная $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг $\cdot$ с^2)).

На поверхности Земли ускорение свободного падения равно

$$g = \frac{GM}{R^2},$$

а масса Земли M легко выражается через искомую плотность ρ и радиус:

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho.$$

Из этих уравнений находим:

$$\rho = \frac{3g}{4\pi GR} = \frac{3 \cdot 9{,}81}{4 \cdot 3{,}1416 \cdot 6{,}371 \cdot 10^6 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}} = 5{,}5 \cdot 10^3 \text{ (кг/м}^3\text{)}.$$

11 класс

1. Наблюдатель находится в Ижевске. Когда Земля ближе к Солнцу: летом или зимой?

Известно, что Земля проходит перигелий своей орбиты в начале января. В этот момент она и будет ближе всего к Солнцу. Поскольку Ижевск находится в северном полушарии, то случится это зимой.

2. Радиус стационарной круговой орбиты искусственной планеты, вращающейся вокруг Солнца, больше радиуса круговой орбиты Земли на 10^7 км. Найти период T (в земных годах) обращения этой планеты вокруг Солнца. Среднее расстояние Земли от Солнца равно $a_E = 149{,}6 \cdot 10^6$ км.

По третьему закону Кеплера

$$\frac{T^2}{T_E^2} = \frac{a^3}{a_E^3}.$$

Следовательно,

$$T = T_E \left(\frac{a_E + 10^7 \text{ км}}{a_E} \right)^{3/2} = T_E \left(1 + \frac{10^7 \text{ км}}{a_E} \right)^{3/2} = 1 \cdot \left(1 + \frac{10^7}{149{,}6 \cdot 10^6} \right)^{3/2} = 1{,}102 \text{ года.}$$

3. Определить время захода Солнца в Ижевске ($\varphi \approx 56°50'$) 21 декабря. Формула для вычисления часового угла Солца $t_{\text{зах}}$ во время захода за горизонт: $\cos t_{\text{зах}} = -\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta$, где φ — широта места наблюдения, δ — склонение Солнца в день наблюдения.

Около 21 декабря происходит зимнее солнцестояние, когда склонение Солнце достигает минимального значения $-23°26'$. Подставим это значение в данную нам формулу:

$$\cos t_{\text{зах}} = -\operatorname{tg} 56°50' \operatorname{tg}(-23°26') = 1{,}53 \cdot 0{,}43 = 0{,}66.$$

Поэтому

$$t_{\text{зах}} = \arccos 0{,}66 = 48°27' = 3^h 14^m.$$

Именно столько времени пройдет от истинного полудня до момента восхода. Прибавив сюда 12^h, надем истинное солнечное время захода.

Можно ещё учесть уравнене времени и получить среднее солнечное время захода, а использовав долготу места наблюдения и часовую зону перейти от среднего к декретному времени. Однако, для этих вычислений исходных данных недостаточно.

4. Найти эксцентриситет e эллиптической орбиты кометы, если известно, что в перигелии её скорость v_π в 4 раза больше скорости в афелии v_α.

Можно воспользоваться готовыми формулами для скорости тела в перигелии и афелии орбиты (см. задачу 2 для 10 класса). А можно прибегнуть к закону сохранения момента импульса, прямым следствием которого является второй закон Кеплера.

Вспомним, что моментом импульса (в плоском движении) называется произведение импульса тела на плечо этого импульса, т. е. на расстояние от начала координат до прямой, по которой направлен импульс. В перигелии и афелии вектор скорости (значит, и импульса) перпендикулярен радиусу-вектору, следовательно плечо импульса равно как раз длине радиуса-вектора. В силу закона сохранения

$$m v_\pi r_\pi = m v_\alpha r_\alpha,$$

где m — масса кометы. Отсюда

$$\frac{r_\alpha}{r_\pi} = \frac{v_\pi}{v_\alpha} = 4,$$

т. е.
$$r_\alpha = 4r_\pi.$$
Следовательно, большая ось орбиты $2a$ равна $r_\alpha + r_\pi = 5r_\pi$. С другой стороны, $r_\pi = a(1-e)$. Получаем уравнение
$$5a(1-e) = 2a,$$
откуда немедленно находим
$$e = 0{,}6.$$

5. Оценить массу атмосферы Земли ($R = 6371$ км).

Атмосферное давление есть следствие веса атмосферы. Используем этот факт для оценки. На поверхности Земли при нормальных условиях давление равно $P = 1{,}01 \cdot 10^5$ Па. Следовательно, на каждый кв. м поверхности давит сила $F = 1{,}01 \cdot 10^5$ Н — это вес столба воздуха над 1 м^2 земной поверхности. Масса этого столба $m = F/g = 1{,}03 \cdot 10^4$ кг (изменением ускорения свободного падения g на высотах порядка нескольких десятков километров, где сосредоточена большая часть атмосферы, для нашей грубой оценки пренебрегаем). Остается сложить массы столбиков на всей поверхности Земли:
$$M = 4\pi R^2 m = 4 \cdot 3{,}1416 \cdot (6{,}371 \cdot 10^6)^2 \cdot 1{,}03 \cdot 10^4 = 5{,}3 \cdot 10^{18} \text{ (кг)}.$$

6. Спортсмен во время прыжка в высоту на Земле поднимает свой центр тяжести на $h = 1{,}8$ м. Оценить радиус того сферического однородного (плотности $\rho = 3$ г/см^3) астероида, с которого этот спортсмен мог бы удалиться на бесконечность в прыжке при той же скорости отрыва, что и на Земле. ($g \approx 10$ м/с^2, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-8}$ см^3/(г $\cdot$ с^2)).

Для того, чтобы удалиться на бесконечность, нужно развить вторую космическую скорость, равную
$$v^2 = \frac{2GM}{R} = \frac{8}{3}\pi G \rho R^2,$$
где M — масса астероида, R — его радиус. Скорость отрыва v найдем из закона сохранения энергии по данным о прыжке на Земле:
$$v^2 = 2gh.$$
Приравнивая эти величины, находим:
$$R = \sqrt{\frac{3gh}{4\pi G\rho}}.$$
Переводим величины в систему СИ и вычисляем:
$$R = \sqrt{\frac{3 \cdot 10 \cdot 1{,}8}{4 \cdot 3{,}1416 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 3 \cdot 10^3}} = 4{,}6 \cdot 10^3 \text{ (м)} = 4{,}6 \text{ (км)}.$$